

叶片动力学相似试验模型设计及其固有特性预测修正

罗忠¹, 郭健¹, 朱云鹏¹, 王德友²

(1. 东北大学 机械工程与自动化学院, 沈阳 110819;

2. 中国航空工业集团公司 沈阳发动机设计研究所, 沈阳 110015)

摘 要: 针对用直板叶片来预测真实带扭型叶片固有特性的相似试验模型设计问题,提出一种在固有特性相似条件下,直板试验模型叶片动力学相似设计方法及修正策略。研究表明:对带扭型叶片当扭转角在其相似区间(固有频率误差小于5%)时,可直接用与其几何相似的直叶片试验模型准确预测对应阶的固有频率,当扭转角超出相似区间时,需用修正系数对与原型完全几何相似的直叶片试验模型的固有频率进行修正,修正后的固有频率值即能准确预测原型叶片的固有频率。

关 键 词: 叶片; 试验模型; 动力学相似; 相似区间; 修正

中图分类号: V232.4

文献标志码: A

Design method and revising strategy of inherent characteristics for dynamical similarity test model of blade

LUO Zhong¹, GUO Jian¹, ZHU Yun-peng¹, WANG De-you²

(1. School of Mechanical Engineering and Automation,
Northeastern University, Shenyang 110819, China;

2. Shenyang Engine Design and Research Institute,
Aviation Industry Corporation of China, Shenyang 110015, China)

Abstract: In allusion to the problem of designing the similarity test model of using straight blade to predict the inherent characteristics of the real torsion blade, a dynamical similarity model designing method of the straight test model blade and a revising strategy were put forward under the condition to have the same inherent characteristics. Research shows that, the torsion blade when the torsion angle in the similar intervals (natural frequency error is less than 5%), can predict the inherent characteristics directly using the geometry similar straight blade. When the torsion angle not in the similar intervals, need to modify the inherent characteristics with correction coefficient, and the modified values can predict the inherent characteristics of the prototype blade accurately.

Key words: blade; experimental model; dynamical similarity; similar interval; revising

叶片是旋转机械如航空发动机、压缩机和水轮机等大型旋转机械装备中的关键部件,由于其具有工作环境的耦合性、运动方程的非线性和边

界条件的复杂性等特点,动力学问题很难用数学方法解决,必须通过物理试验来研究。然而在工程实际中,直接采用原型试验往往由于几何尺寸、材

收稿日期:2014-03-02

基金项目:国家重点基础研究发展计划(2012CB026005);国家自然科学基金(51105064)

作者简介:罗忠(1978—),男,内蒙古集宁人,副教授,博士,主要从事模型试验理论与自动控制方面的研究。

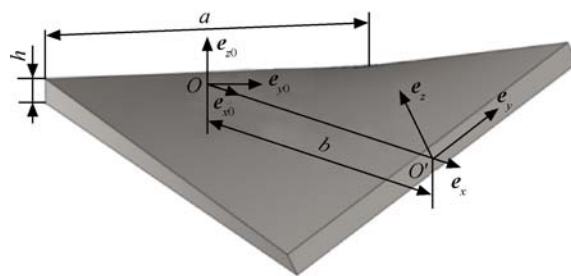
料成本、试验周期以及试验难度等问题难以进行,因此常考虑采用相似缩尺模型进行试验^[1-3].实际中使用的叶片大多是带一定预扭转角的扭叶片^[4],由于结构复杂,扭叶片的完全相似试验模型加工难度大且制作成本高,所以试验中可考虑采用直板叶片作为扭叶片的畸变试验模型进行试验.

关于叶片相似试验模型设计的研究,学者们做了很多工作,如国内学者郝燕平^[5]对压气机叶片所涉及的几个结构相似性问题进行了理论研究,讨论了在保持气动相似的条件下,模型叶片和原型叶片之间静强度、振动特性、振动响应的相似性问题;张振华等^[6]研究了固支加筋方板在均布冲击载荷作用下动态响应的相似畸变问题,建立了修正模型以预测原型结构的冲击响应;罗忠等^[7]对设计复合材料层合板类结构相似试验模型的问题,提出一种固有特性相似时的不完全几何相似模型的尺寸区间确定方法;国外学者Friedmann^[8]通过相似模型试验与计算机仿真对比的方法,分析了直升机旋转叶片的气动弹性特性;Rezaeepazhand等^[9]在利用相似模型对层合板振动响应进行预测的研究中阐述了畸变模型相似适用区间的重要性,并在几何尺寸完全相似条件下对不同材料的层合板的一阶固有频率的适用区间进行了研究.综上所述,针对带扭型叶片相似试验模型设计问题及其扭转角相似区间确定及固有特性修正方法的研究文献尚不多见.

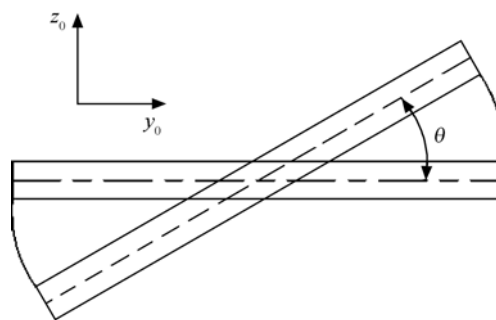
本文运用方程分析法与动力平衡方程相结合的方法,建立了带扭原型叶片与其完全几何相似模型的相似关系;利用解析和有限元法相对照,给出带扭型叶片在不同阶次下固有特性一致的畸变试验模型的扭转角相似区间确定方法,并说明扭转角不在相似区间内的模型各阶固有频率的修正系数的确定方法.

1 叶片动力平衡方程

如图1所示的带扭型叶片;叶片叶身长度为 b ;叶片叶身宽度为 a ;叶片叶身厚度为 h ,坐标系 $x_0 y_0 z_0$ 为叶片根部坐标系; e_{x0}, e_{y0}, e_{z0} 代表叶片根部中点的各坐标单位向量, e_{x0} 沿叶片的长度方向, e_{y0} 沿叶片根部的宽度方向, e_{z0} 沿叶片根部的厚度方向,原点在叶片根部宽度为 $a/2$,厚度为 $h/2$ 处,单位向量为 e_x, e_y, e_z ; e_x 沿叶片长度方向,与 e_{x0} 重合, e_y 沿叶片任意长度位置的宽度方向, e_z 沿叶片任意长度位置的厚度方向;带扭型叶片



(a) 叶片主要结构参数



(b) 叶片扭转角

图1 带扭型叶片示意图

Fig. 1 Diagram of torsion blade

的扭转角为 θ ,扭转角变化率为 κ ,即叶片长度位置上的扭转角为

$$\theta_{(x)} = \kappa x \quad (1)$$

不考虑叶片扭转引起的翘曲惯性力,带扭型叶片的动力平衡方程为^[10-11]

$$\begin{aligned} D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \\ D \kappa^2 \left[3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - \\ D \kappa^4 \left[x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2x \frac{\partial w}{\partial x} \right] = \\ - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ 为叶片弯曲刚度,其中 E 为叶片材料弹性模量, μ 为叶片材料泊松比; w 为 t 时刻叶片中面挠曲函数; x 为叶片长度方向坐标; y 为叶片宽度方向的坐标; ρ 为叶片质量密度; t 为时间.

2 完全几何相似的相似关系

带扭型叶片挠度函数可表示为^[12]

$$w_{(x,y,t)} = W_{(x,y)} \sin(\omega t) \quad (3)$$

式中 $W_{(x,y)}$ 为振型函数; ω 为叶片固有频率.

将式(3)代入式(2),运用相似理论,由方程分析法^[13-14]得

$$\begin{aligned} & \lambda_D D \left[\frac{\lambda_W}{\lambda_x^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\lambda_W}{\lambda_x^2 \lambda_y^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\lambda_W}{\lambda_y^4} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + \\ & \lambda_D \lambda_\kappa^2 D \kappa^2 \left[3 \frac{\lambda_W}{\lambda_x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\lambda_W}{\lambda_y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - \\ & \lambda_D \lambda_\kappa^4 D \kappa^4 \left(\lambda_W x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \lambda_x^2 \frac{\lambda_W}{\lambda_y^2} x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ & \left. 2 \lambda_W x \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \lambda_\rho \lambda_h \lambda_W \lambda_\omega^2 \rho h \omega^2 w \quad (4) \end{aligned}$$

式中 λ_D 为叶片弯曲刚度相似比, λ_W 为振型的相似比, λ_x 为叶片长度方向坐标的相似比, λ_y 为叶片宽度方向坐标的相似比, λ_κ 为扭转角变化率的相似比, λ_ρ 为叶片密度的相似比, λ_h 为叶片叶身厚的相似比, λ_ω 为叶片固有频率相似比。

完全几何相似时,由相似定理知^[15-16]

$$\begin{aligned} \lambda_x &= \lambda_y = \lambda_a = \lambda_b = \lambda_h = \lambda \\ \lambda_\rho &= \lambda_E = 1 \end{aligned} \quad (5)$$

将式(5)代入式(4),根据相似原理各项系数相等有

$$\frac{1}{\lambda} = \lambda \lambda_\kappa^2 = \lambda^3 \lambda_\kappa^4 = \lambda \lambda_\omega^2 \quad (6)$$

由式(6)可得

$$\lambda_\kappa^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad \lambda_\omega^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (7)$$

则由式(7)可知带扭型叶片扭转角相似关系为 $\lambda_\theta = \lambda_\kappa \lambda = 1$,即在完全几何相似中应保证叶片扭转角相同。

设原型叶片参数如表1所示,原型叶片扭转角为 30° 。参照表1选取表2所示的完全相似模型叶片对原型叶片各阶固有频率进行预测,得到模型叶片各阶固有频率如图2所示。

表1 原型叶片参数

Table 1 Parameters of prototype blade

b/mm	a/mm	h/mm	E/GPa	μ	$\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$
70	40	2.14	200	0.3	7860

表2 模型叶片的尺寸参数

Table 2 Dimension parameters of model blade

模型	b/mm	a/mm	h/mm	$\theta/(\circ)$	λ
M1	84	48	2.568	30	0.8333
M2	105	60	3.21	30	0.6667
M3	140	80	4.28	30	0.5000

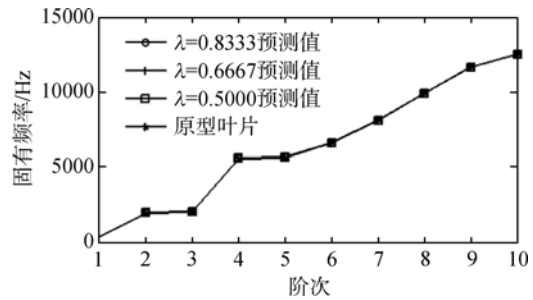


图2 模型叶片固有频率预测曲线

Fig. 2 Prediction curve of model's blade natural frequencies

由图2可知,式(7)的相似关系对原型叶片固有频率有准确的预测结果。

3 扭转角相似区间及修正系数的确定

当某一参数相似比在一定数值范围内,系统相似性与该相似比无关时,该区域为自相似区,也称为自模区域^[17]。

在带扭型叶片试验模型加工过程中,往往由于加工条件的限制无法实现完全几何相似,而使得扭转角 θ 在原型与模型中保持一致的条件相对于其他几何尺寸的完全相似条件更加难以保证,故此处分析放宽扭转角的完全相似关系,通过数值分析的方法给出扭转角不完全相似的自相似区间。

由式(6)可知,要满足完全几何相似关系,必须满足

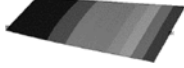
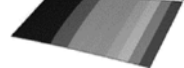
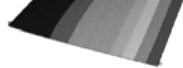
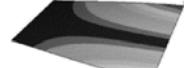
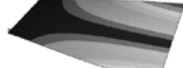
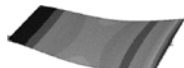
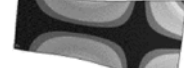
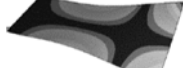
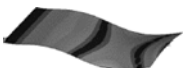
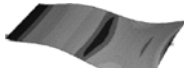
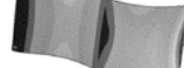
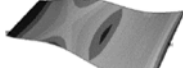
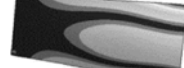
$$\lambda_\kappa^2 = \lambda^2 \lambda_\kappa^4 = \lambda_\omega^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (8)$$

当 $\lambda_\kappa^2 \neq 1/\lambda$ 时,扭转角不满足完全相似条件,但由表3可看出扭转角的变化对带扭型叶片低阶固有频率的影响很小,故带扭型叶片的扭转角可作为模型叶片的自相似参数考虑,下面通过数值分析的方法确定带扭型叶片扭转角的自相似区间。

常用带扭型叶片的预扭转角满足 $\theta \leq 30^\circ$ ^[18],考虑扭转角小于 30° 的叶片各阶固有频率与无扭直叶片固有频率的对比如图3所示。

由图3可知,带扭型叶片与无扭直叶片在1阶、5阶、6阶振型处固有频率变化不大,分别对图中6条曲线进行数值拟合得到带扭型叶片的前6阶固有频率关于其扭转角的三次多项式如表4所示。

表3 不同扭转角叶片振型图及固有频率
Table 3 Modes and natural frequencies of different torsion angle

阶次	固有频率/Hz			
	0°	10°	20°	30°
1 阶	 369	 369	 368	 367
2 阶	 1417	 1489	 1687	 1962
3 阶	 2294	 2257	 2157	 2020
4 阶	 4662	 4772	 5093	 5444
5 阶	 5343	 5374	 5432	 5569
6 阶	 6372	 6381	 6435	 6567

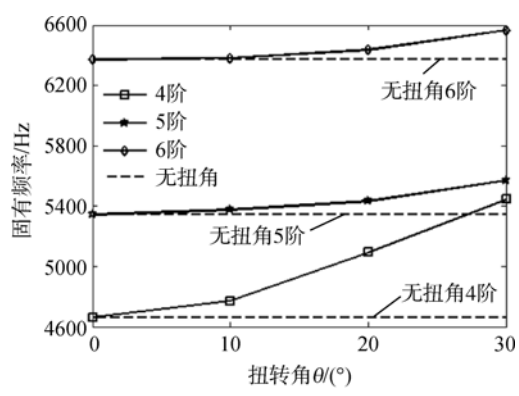
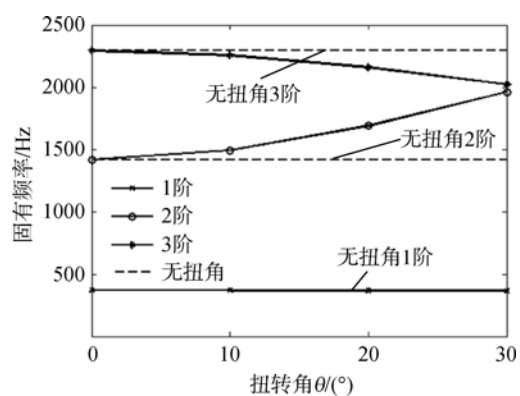


图3 随角度变化带扭叶片与无扭直板叶片各阶固有频率对比图

Fig. 3 Comparison of natural frequencies between on torsion straight blade and torsion blade when torsion angle changes

表4 固有频率曲线拟合多项式

Table 4 Fitting polynomial of nature frequencies curve

阶次	三次多项式
1	$\omega_1 = 0.0002\theta^3 - 0.01\theta^2 - 0.0833\theta + 369$
2	$\omega_2 = 0.9\theta^2 - 0.7\theta + 1417$
3	$\omega_3 = -0.4\theta^2 + 0.3\theta + 2294$
4	$\omega_4 = 2\theta^2 - 5.6\theta + 4662$
5	$\omega_5 = -0.1\theta^2 + 3.5\theta + 5343$
6	$\omega_6 = 0.1\theta^2 - 0.3\theta + 6372$

根据表4所列的多项式,分析其与无扭直叶片固有频率的误差求解相似区间,若认为误差 $\eta \leq 5\%$ 即可满足相似模型的设计要求,则1阶振型处有

$$\frac{|\omega_1 - 369|}{369} \times 100\% \leq 5\% \quad (9)$$

由式(9)可解得1阶固有频率的扭转角相似区间为 $C_1 = [0^\circ, 73^\circ]$.

同理可得到带扭型叶片其他各阶固有频率的扭转角相似区间如表5所示.

表5 各阶固有频率的扭转角相似区间

Table 5 Similar interval of nature frequencies torsion angle

阶次	扭转角相似区间	阶次	扭转角相似区间
1	$C_1 = [0^\circ, 73^\circ]$	4	$C_4 = [0^\circ, 12.29^\circ]$
2	$C_2 = [0^\circ, 9.27^\circ]$	5	$C_5 = [0^\circ, 72.07^\circ]$
3	$C_3 = [0^\circ, 17.31^\circ]$	6	$C_6 = [0^\circ, 57.96^\circ]$

由表5可知,对带扭型叶片当扭转角在其相似区间时可直接用与其完全几何相似的无扭直叶片试验模型叶片准确预测对应阶的固有频率;对扭转角超出相似区间的各阶固有频率需进行线性方程拟合,由拟合方程得到修正系数,并用该修正系数对与原型完全几何相似的无扭直叶片试验模型的固有频率进行修正,修正后的固有频率即能准确预测原型叶片的固有频率.

以扭转角为 30° ,其他参数如表1的叶片为例.由表5知,该叶片在1阶、5阶、6阶振型处固有频率的预测只需要建立与其完全几何相似的直叶片试验模型即可;对2阶、3阶、4阶振型的固有频率进行线性方程拟合,如图4所示,由线性方程斜率得到修正系数.

设斜率 K 为无扭直叶片试验模型的修正系

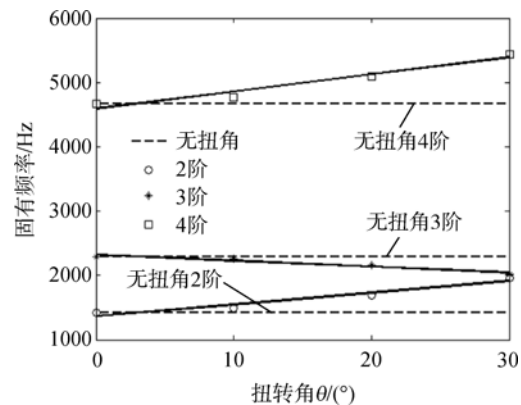


图4 2阶、3阶、4阶固有频率线性拟合

Fig. 4 Linear fitting of nature frequencies of 2th order, 3th order and 4th order

数,则2阶、3阶、4阶固有频率的修正系数分别为 $K_2 = 18.3$, $K_3 = -9.2$, $K_4 = 26.7$,修正后模型叶片与原型叶片固有频率关系为

$$\omega_p = \frac{1}{\lambda} \omega_m + K\theta_p \quad (10)$$

式中 ω_p 为原型叶片固有频率, ω_m 为修正后模型叶片固有频率, θ_p 为原型叶片扭转角.

修正后模型对原型的预测误差为

$$\eta = \frac{|\omega_p - \omega_m|}{\omega_m} \times 100\% \quad (11)$$

4 试验验证

用 30° 扭转角叶片和无扭直叶片进行试验,测得前4阶固有频率和振型,叶片参数如表6所示.

表6 30° 扭转角叶片和无扭直叶片参数Table 6 Parameters of 30° torsion blade and no torsion straight blade

b/mm	a/mm	h/mm
70	40	2.14

将两试验用叶片分别放置在振动台上进行扫频试验,并用LMS测得叶片的前4阶固有频率和振型,试验结果如表7、表8所示.表7为 30° 扭转角的叶片和无扭直叶片的试验所得固有频率,表8为无扭直叶片的试验所得振型.

由第3节知,试验用叶片的前4阶固有频率的扭转角相似区间为 $C_1 = [0^\circ, 73^\circ]$, $C_2 = [0^\circ, 9.27^\circ]$, $C_3 = [0^\circ, 17.31^\circ]$, $C_4 = [0^\circ, 12.29^\circ]$, 30° 扭转角叶片的1阶固有频率在其相似区间内,故建立无扭直叶片试验模型进行试验得到的1阶固

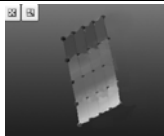
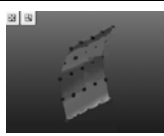
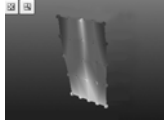
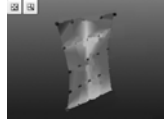
表7 30°扭转角叶片和无扭直叶片的试验所得固有频率

Table 7 Nature frequencies of 30° torsion blade and no torsion straight blade acquired from test

阶次	30°扭转角叶片的固有频率/Hz	无扭直叶片的固有频率/Hz
1	370.94	366
2	1921.88	1415
3	2010.94	2210
4	5342.58	4424

表8 无扭直叶片的试验所得振型

Table 8 Vibration model of no torsion straight blade acquired from test

阶次	振型	阶次	振型
1		3	
2		4	

有频率应能准确预测 30°扭转角叶片的 1 阶固有频率,而无扭直叶片的 2 阶、3 阶、4 阶固有频率通过式(10)中的修正系数进行修正后也应能对 30°扭转角的叶片的对应阶固有频率进行预测.由表 7 试验结果及式(11)可计算得无扭直叶片试验模型预测 30°扭转角叶片前 4 阶固有频率的误差,如表 9 所示.

表9 无扭直叶片预测 30°扭转角叶片前 4 阶固有频率的误差

Table 9 Deviation of nature frequencies by using no torsion straight blade to predict the torsion blade of 30°

阶次	固有频率误差/%	阶次	固有频率误差/%
1	1.35	3	3.98
2	2.14	4	2.25

由表 9 可知,通过上述方法用与 30°扭转角叶片完全几何相似的无扭直叶片试验模型预测 30°扭转角叶片各阶固有频率误差都较小,验证了文中所给的相似区间和修正系数的正确性和有效性.

5 结 论

本文针对带扭型叶片振动试验分析时相似试验模型的设计问题,研究并提出一种试验模型的扭转角相似区间的确定及修正方法.采用方程分析法与动力平衡方程分析相结合的方法,建立了原型叶片与模型叶片之间的相似关系,导出了完全几何相似的无扭相似关系.以一种几何参数一定、扭转角以一定步长变化的等厚原型叶片为例,利用解析和有限元相对照的方法,给出了在不同阶次下,使固有特性保持相似的畸变试验模型扭转角相似区间的确定方法.研究表明:对带扭型叶片当扭转角在其相似区间时,可直接用与其完全几何相似的无扭直叶片试验模型准确预测对应阶的固有频率;当扭转角超出相似区间时,需用修正系数对与原型完全几何相似的无扭直叶片试验模型的固有频率进行修正,修正后的固有频率值即能准确预测原型叶片的固有频率.最后通过试验验证了文中所述方法的有效性.

参考文献:

- [1] Dhar S. Development and validation of small-scale model to predict large wind turbine behavior[D]. Mumbai, India: Indian Institute of Technology Bombay, 2006.
- [2] Martin H R. Development of a scale model wind turbine for testing of offshore floating wind turbine systems[D]. Hancock County, US: Maine Maritime Academy, 2011.
- [3] 洪杰,张大义,陈璐璐.气流激励下的叶片高周疲劳寿命研究的发展[J].航空动力学报,2009,24(3):652-661.
HONG Jie, ZHANG Dayi, CHEN Lulu. Review on investigation of high cycle fatigue failures for the aero engine blade[J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(3): 652-661. (in Chinese)
- [4] 宋兆泓.航空燃气涡轮发动机强度设计[M].北京:北京航空学院出版社,1988.
- [5] 郝燕平.叶轮机叶片结构相似性问题的理论研究[R].南京:中国航空学会第六届动力年会,2006.
- [6] 张振华,秦健,王乘,等.固支加筋方板在均布冲击载荷作用下动态响应的相似畸变研究[J].哈尔滨工程大学学报,2008,29(3):226-231.
ZHANG Zhenhua, QIN Jian, WANG Cheng, et al. Method for scaling impact load data obtained from a small scale model to that of the full size clamped and stiffened plate [J]. Journal of Harbin Engineering University, 2008, 29(3): 226-231. (in Chinese)
- [7] 罗忠,朱云鹏,陈晓兵,等.复合材料层合板相似模型的几何区间确定方法[J].机械工程学,2014,50(9):58-64.
LUO Zhong, ZHU Yunpeng, CHEN Xiaobing, et al. Study of the structure size interval of similar test model of the

- laminated composite plate[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(9): 58-64. (in Chinese)
- [8] Friedmann P P. Aeroelastic scaling for rotary-wing aircraft with applications[J]. Journal of Fluids and Structures, 2004, 19(5): 635-650.
- [9] Rezaeepazhand J, Simitses G J, Starnes J H. Use of scaled-down models for predicting vibration response of laminated plates[J]. Composite Structures, 1995, 30(4): 419-426.
- [10] 何福保, 沈亚鹏. 板壳理论[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1993.
- [11] Sinha S K, Turner K E. Natural frequencies of a pre-twisted blade in a centrifugal force field[J]. Journal of Sound and Vibration, 2011, 330(11): 2655-2681.
- [12] Qatu M S, Leissa A W. Vibration studies for laminated composite twisted cantilever plates[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1991, 33(11): 927-940.
- [13] 李之光. 相似与模化(理论及应用)[M]. 北京: 国防工业出版社, 1982.
- [14] Rezaeepazhand J, Simitses G J. Structural similitude for vibration response of laminated cylindrical shells with double curvature[J]. Composites: Part B Engineering, 1997, 28(3): 195-200.
- [15] 周美立. 相似工程学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1998.
- [16] 郑哲敏, 谈庆明, 王补宣. 相似理论与模化[M]// 郑哲敏. 郑哲敏文集; 第3篇. 北京: 科学出版社, 2004: 777-808.
- [17] 张英. 工程流体力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2002.
- [18] He L H, Lim C W, Kitipornchai S. A non-discretized global method for free vibration of generally laminated fibre-reinforced pre-twisted cantilever plates[J]. Computational Mechanics, 2000, 26(2): 197-207.

(编辑: 叶 青)